Les matrices

Résolutions des exercices

Réponse 01 :

1- Vu que : det(A)=-1 $\neq 0$ alors A est inversible

Calcul de : $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{cof}(A)^t=(-1)\text{cof}(A)^t$

Matrice des cofacteurs =cof(A) :

$\Delta_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & -12\\ -4 & -5\end{vmatrix}=-13$; $\Delta_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}12 & -12\\ 6 & -5\end{vmatrix}=-12$; $\Delta_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}12 & -7\\ 6 & -4\end{vmatrix}=-6$

$\Delta_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-8 & -12\\ -4 & -5\end{vmatrix}=8$; $\Delta_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}13 & -12\\ 6 & -6\end{vmatrix}=7$; $\Delta_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}13 & -8\\ 6 & -4\end{vmatrix}=4$

$\Delta_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-8 & -12\\ -7 & -12\end{vmatrix}=12$; $\Delta_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}13 & -12\\ 12 & -12\end{vmatrix}=12$; $\Delta_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}13 & -8\\ 12 & -7\end{vmatrix}=5$

Ainsi : $\text{cof}(A)=\begin{pmatrix}-13 & -12 & -6\\ 8 & 7 & 4\\ 12 & 12 & 5\end{pmatrix}$ et $A^{-1}=(-1)\begin{pmatrix}-13 & 8 & 12\\ -12 & 7 & 12\\ -6 & 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -8 & -12\\ 12 & -7 & -12\\ 6 & -4 & -5\end{pmatrix}$

2-calcul de A^2 : $A^2=A.A=I_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Ainsi : $A^{2n}=(A^2)^n=(I_3)^n=I_3$

De meme : $A^{2n+1}=A^{2n}.A=I_3.A=A$

Réponse 02 :

1-calcul : $A^2=A.A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$

2-calcul de : $A^2-A-2I_3=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=0_3$

3-vu que $A^2-A-2I_3=0_3$

Alors : $A^2-A=2I_3$; d'où : $\frac{1}{2}A(A-I_3)=I_3$ aussi $\frac{1}{2}(A-I_3)A=I_3$

Donc : $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I_3)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Réponse 03 :

1- Calcul de A(0) : A(0)=I_2=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2-calcul de :

A(x).A(y)=$\begin{pmatrix} cosx & -sinx \\ sinx & cosx \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cosy & -siny \\ siny & cosy \end{pmatrix}$=

$\begin{pmatrix} cosxcosy - sinxsiny & -\cos x\, siny - sinxcosy \\ sinxcosy + cosxsiny & -sinxsiny + cosxcosy \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}$;

3-Déduction : A(x).A (-x)=$\begin{pmatrix} \cos(x-x) & -\sin(x-x) \\ \sin(x-x) & \cos(x-x) \end{pmatrix}$=A(0)=$I_2$

Ainsi : A(x) est inversible et son inverse est A^{-1}(x)=A (-x)

Réponse 04 :

Si det(A_t)$\neq 0$ alors A est inverible

Or :det(At)=$\begin{vmatrix} t-2 & 4 & 3 \\ 1 & t+1 & -2 \\ 0 & 0 & t-4 \end{vmatrix}$=(t-4) $\begin{vmatrix} t-2 & 4 \\ 1 & t+1 \end{vmatrix}$=(t-4)$[(t-2)(t+1)-4]$≠0

Alors : (t-4)$(t^2 - t - 6) \neq 0$

Cad : t$\neq 3$, t$\neq -2$ et t $\neq 4$

Donc : A_t est inverible pour t $\in \mathbb{R}$ / $\in \{3,4,-2\}$

Réponse 05 :

1-calcul :A^2=$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$=$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ -6 & 10 & -12 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

2-calcul de a,b tels que A^2=a A+bI_3

On a : aA+bI_3=$\begin{pmatrix} a+b & -3a & 6a \\ 6a & b-8a & 12a \\ 3a & -3a & b+4a \end{pmatrix}$

Par identification on obtient : $\begin{cases} a+b=1 \\ -3a=3 \end{cases}$

Donc : a=-1 et b=2

3-ainsi on aura : A^2= -A+2I_3

Cad : A^2+A=2I_3

Donc : $\frac{1}{2}$(A^2+A)=I_3

Alors : A $(\frac{1}{2}(A+I_3))=I_3$ aussi $\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)\mathrm{A}=I_3$

L'inverse de A est : $A^{-1}=\frac{1}{2}(A+I_3)$

Réponse 06 :

1-calcul $^tPP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=I_3$

2-donc P est inversible et son inverse est ^tP

Cad : $P^{-1}={}^tP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$